

IMPLEMENTASI METODE NUMERIK DERET MACLAURIN UNTUK APROKSIMASI FUNGSI MATEMATIKA MENGGUNAKAN MATLAB

Azhara Amelia, Lastri Elisabet Butarbutar, Daniel Rumahorbo, Putri Harliana

Ilmu Komputer, Universitas Negeri Medan
Jl Wiliem Iskandar, Medan, Indonesia
azzahra_amelia75@icloud.com

ABSTRAK

Dalam dunia komputasi numerik, aproksimasi fungsi matematika sering digunakan untuk menyelesaikan masalah yang tidak memiliki solusi analitik atau untuk mempercepat perhitungan. Salah satu metode yang banyak digunakan adalah deret Maclaurin, yang merepresentasikan fungsi sebagai deret tak hingga dengan turunan di sekitar titik pusat ekspansi $x=0$. Meskipun metode deret Maclaurin sederhana dan efektif, tingkat akurasi menurun pada nilai x yang jauh dari pusat ekspansi, terutama ketika jumlah suku deret yang digunakan kecil. Oleh karena itu, diperlukan analisis lebih lanjut mengenai pengaruh jumlah suku deret terhadap akurasi aproksimasi. Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode numerik deret Maclaurin menggunakan MATLAB, mengevaluasi kinerjanya dalam aproksimasi fungsi matematika, serta menganalisis hubungan antara jumlah suku deret dan tingkat error yang dihasilkan. Metode penelitian melibatkan implementasi deret Maclaurin pada fungsi eksponensial e^x , sinus $\sin(x)$, dan logaritma alami $\ln(1+x)$ menggunakan MATLAB. Analisis dilakukan dengan menghitung error absolut dan relatif serta memvisualisasikan hasil aproksimasi menggunakan grafik. Hasil menunjukkan bahwa deret Maclaurin memberikan aproksimasi yang akurat untuk nilai x yang dekat dengan pusat ekspansi. Peningkatan jumlah suku deret secara signifikan mengurangi error, tetapi pada fungsi dengan singularitas, akurasi tetap terbatas. Implementasi MATLAB mempermudah analisis numerik dan visualisasi hasil.

Kata kunci : Deret Maclaurin, aproksimasi fungsi, metode numerik, MATLAB, analisis error

1. PENDAHULUAN

Dalam dunia komputasi ilmiah, aproksimasi fungsi merupakan salah satu topik penting, terutama dalam menyelesaikan masalah yang tidak memiliki solusi analitik atau untuk mempercepat proses komputasi. Salah satu metode yang sering digunakan untuk aproksimasi fungsi adalah deret Maclaurin, sebuah bentuk khusus dari deret Taylor yang dievaluasi di sekitar titik $x=0$. Metode ini tidak hanya sederhana tetapi juga sangat efektif untuk fungsi yang bersifat analitik.

MATLAB, sebagai perangkat lunak komputasi numerik yang populer, menyediakan alat yang mumpuni untuk melakukan analisis numerik, termasuk implementasi deret Maclaurin. Penggunaan MATLAB memungkinkan simulasi dan visualisasi hasil aproksimasi secara efisien, sehingga sangat mendukung pembelajaran dan eksplorasi metode numerik di berbagai bidang seperti fisika, teknik, dan matematika terapan.

Pada umumnya, fungsi matematika dapat dihitung dengan presisi tinggi menggunakan algoritma bawaan pada perangkat lunak atau kalkulator. Namun, dalam beberapa kasus, aproksimasi diperlukan, seperti: Saat menghitung dengan perangkat keras yang memiliki keterbatasan sumber daya. Ketika fungsi tersebut harus dimodelkan dalam bentuk polinomial untuk keperluan analisis lebih lanjut. Untuk memahami perilaku fungsi dalam ruang lingkup tertentu, misalnya di sekitar $x=0$.

Dengan demikian, muncul pertanyaan tentang bagaimana implementasi deret Maclaurin dapat

memberikan aproksimasi yang akurat untuk berbagai fungsi matematika, serta seberapa besar tingkat error yang dihasilkan dibandingkan dengan nilai eksak.

Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode deret Maclaurin menggunakan MATLAB. Mengevaluasi kinerja deret Maclaurin dalam mengaproksimasi fungsi matematika tertentu. Menganalisis hubungan antara jumlah suku dalam deret dan tingkat akurasi hasil aproksimasi. Menyediakan visualisasi hasil aproksimasi untuk memahami efektivitas metode ini.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat berikut: Memahami dasar-dasar deret Maclaurin dan implementasinya dalam komputasi numerik. Menyediakan pedoman bagi pelajar atau peneliti yang tertarik menggunakan MATLAB untuk menyelesaikan masalah serupa. Memberikan wawasan tentang pentingnya metode aproksimasi dalam aplikasi nyata, seperti pada pemrosesan sinyal, simulasi fisika, dan optimasi algoritma.

Penelitian ini fokus pada implementasi deret Maclaurin untuk fungsi analitik sederhana seperti Analisis error terbatas pada domain kecil di sekitar $x=0$, dengan jumlah suku deret yang relatif rendah (maksimal 10 suku).

2. TINJAUAN PUSTAKA

Smith et al. (2020) mengevaluasi efektivitas deret Maclaurin pada aproksimasi fungsi eksponensial berikut: e^x

Hasil menunjukkan error kurang dari 0,1% untuk 6 suku di sekitar $x = 0$. Brown dan Johnson (2018)

memanfaatkan deret ini pada pemrosesan sinyal audio, menghasilkan aproksimasi efisien untuk filter digital. Sementara itu, Rahman et al. (2022) menganalisis visualisasi error dalam deret Maclaurin menggunakan MATLAB, menemukan bahwa error meningkat signifikan saat x mendekati singularitas fungsi. Penelitian ini melanjutkan eksplorasi dengan fokus pada implementasi MATLAB dan analisis error numerik secara terperinci.

2.1. Metode Deret Maclaurin

Deret Maclaurin merupakan bentuk khusus dari deret Taylor, di mana fungsi $f(x)$ diekspansi di sekitar titik $x=0$. Diperkenalkan oleh Colin Maclaurin pada abad ke-18, deret ini banyak digunakan dalam berbagai bidang untuk menyederhanakan analisis fungsi yang kompleks.

Formula umum deret Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Penggunaan deret Maclaurin efektif untuk fungsi analitik yang dapat diturunkan tak hingga di sekitar $x=0$. Contoh aplikasi meliputi aproksimasi fungsi eksponensial (e^x), trigonometri, dan logaritma.

2.2. Keunggulan dan Keterbatasan Deret Maclaurin

Menurut Stewart (2015), deret Maclaurin sangat berguna dalam pemrosesan sinyal, mekanika fluida, dan fisika kuantum karena kemudahannya dalam menyajikan fungsi kompleks sebagai polinomial sederhana. Namun, akurasi deret ini tergantung pada:

- Jumlah suku yang digunakan (orde deret).
- Nilai x (efektif untuk nilai x kecil).
- Properti fungsi (fungsi dengan singularitas di dekat $x=0$ menghasilkan error tinggi).

2.3. MATLAB dalam Implementasi Numerik

MATLAB telah menjadi alat utama dalam komputasi numerik dan simulasi, termasuk untuk implementasi deret Maclaurin. Chapra dan Canale (2019) menjelaskan bahwa MATLAB menyediakan fungsi bawaan untuk manipulasi simbolik, visualisasi grafik, dan operasi numerik yang memungkinkan pengguna untuk:

1. Menghitung derivatif secara simbolik menggunakan toolbox *Symbolic Math*.
2. Menyelesaikan perhitungan numerik dengan cepat menggunakan algoritma vektor.
3. Membandingkan hasil aproksimasi dengan nilai eksak secara visual.
4. Penelitian Terdahulu
 - a. Smith et al. (2020) mengevaluasi efektivitas deret Maclaurin dalam aproksimasi fungsi eksponensial untuk aplikasi pemodelan dinamika populasi. Penelitian ini menunjukkan bahwa deret Maclaurin dengan 6 suku

menghasilkan error kurang dari 0,1% pada domain

- b. Brown dan Johnson (2018) mengkaji implementasi deret Maclaurin pada pemrosesan sinyal audio. Penelitian ini menemukan bahwa polinomial orde rendah dapat digunakan untuk mempermudah komputasi filter digital.
- c. Rahman et al. (2022) menggunakan MATLAB untuk memvisualisasikan error pada deret Maclaurin dalam aproksimasi fungsi. Hasilnya menunjukkan bahwa error meningkat secara eksponensial saat x mendekati -1, karena adanya singularitas di Gap Penelitian.

Meskipun penelitian sebelumnya telah mengeksplorasi deret Maclaurin dan implementasinya, beberapa celah penelitian yang dapat dieksplorasi adalah:

- a. Analisis error yang lebih mendalam untuk berbagai jenis fungsi matematika.
- b. Optimasi implementasi deret Maclaurin untuk domain yang lebih luas.
- c. Aplikasi spesifik pada bidang teknik atau sains yang membutuhkan aproksimasi fungsi kompleks.

2.4. Relevansi Penelitian

Penelitian ini melanjutkan tradisi penggunaan deret Maclaurin dengan fokus pada evaluasi kinerja metode ini menggunakan MATLAB. Hasil penelitian diharapkan dapat memperkaya literatur terkait dengan memberikan panduan praktis dan analisis kinerja yang lebih terperinci.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan metode eksperimental. Implementasi deret Maclaurin dilakukan untuk berbagai fungsi matematika menggunakan MATLAB, dan hasilnya dievaluasi melalui analisis numerik dan visualisasi grafik. Penelitian ini terdiri dari beberapa tahapan sebagai berikut:



3.1. Studi Literatur

Mengumpulkan referensi teoritis. Terkait deret Maclaurin, metode numerik, dan penggunaan MATLAB untuk analisis matematis. Literatur yang digunakan mencakup buku teks, jurnal, dan dokumentasi MATLAB.

3.2. Pemilihan Fungsi Uji

Fungsi matematika yang dipilih untuk diaproksimasi menggunakan deret Maclaurin adalah:

- Fungsi eksponensial
 - Fungsi sinus
 - Fungsi logaritma alami
- Pemilihan fungsi ini didasarkan pada karakteristiknya yang sering digunakan dalam analisis numerik dan aplikasi nyata.

3.3. Implementasi Deret Maclaurin

Deret Maclaurin diimplementasikan untuk setiap fungsi menggunakan MATLAB. Tahapan implementasi mencakup:

- Menghitung koefisien deret Maclaurin hingga orde tertentu (n) menggunakan toolbox simbolik MATLAB.
- Membuat polinomial aproksimasi berdasarkan koefisien yang dihitung.
- Mengevaluasi hasil aproksimasi pada interval nilai x tertentu, misalnya Analisis Error.
- Error dihitung untuk mengevaluasi akurasi deret Maclaurin. Metode yang digunakan adalah:
 - Error absolut

$$E_a = |f(x) - P_n(x)|$$

$$E_a = |f(x) - P_n(x)|$$
 di mana $P_n(x)$ adalah nilai aproksimasi deret Maclaurin.
 - Error relatif:

$$E_r = \frac{|f(x) - P_n(x)|}{|f(x)|} \times 100\%$$

$$E_r = \frac{|f(x) - P_n(x)|}{|f(x)|} \times 100\%$$
- Visualisasi Hasil
 Hasil aproksimasi divisualisasikan dalam bentuk grafik, yang mencakup:
 - Perbandingan antara fungsi asli dan aproksimasi.
 - Grafik error absolut dan relatif terhadap nilai x .

3.4. Alat dan Bahan

- Software: MATLAB R2023a dengan Symbolic Math Toolbox.
- Hardware: Laptop dengan spesifikasi minimal prosesor Intel Core i5 dan RAM 8 GB untuk memastikan proses komputasi berjalan lancar.

3.5. Parameter Penelitian

- Jumlah suku deret (n): Diuji dengan variasi $n = 2, 4, 6, 8, 10$.
- Domain nilai x : Dibatasi pada interval $[-2, 2]$ untuk menjaga validitas deret Maclaurin.

- Fungsi uji: Fungsi eksponensial, trigonometri, dan logaritma.

3.6. Prosedur Pengolahan Data

- Menjalankan skrip MATLAB untuk menghitung nilai aproksimasi.
- Merekam hasil aproksimasi, error, dan waktu komputasi untuk setiap nilai n .
- Membandingkan hasil aproksimasi dengan nilai eksak menggunakan data numerik dan grafik.

3.7. Kriteria Keberhasilan

Penelitian dianggap berhasil jika:

- Polinomial deret Maclaurin memberikan hasil aproksimasi yang mendekati fungsi asli dengan error minimal.
- Visualisasi menunjukkan konvergensi deret saat jumlah suku (n) meningkat.
- Hasil analisis memberikan wawasan tentang hubungan antara jumlah suku, domain x , dan tingkat error.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Hasil Fungsi Eksponensial (e^x)

Aproksimasi deret Maclaurin untuk fungsi e^x menunjukkan konvergensi yang baik terhadap fungsi asli, terutama di sekitar $x = 0$. Saat jumlah suku meningkat (misalnya $n = 6$ atau lebih), perbedaan antara aproksimasi dan nilai asli semakin kecil. Error relatif dan absolut sangat rendah di sekitar $x = 0$, namun mulai meningkat pada nilai $|x|$ yang lebih besar. Fungsi eksponensial e^x memberikan hasil yang stabil di seluruh domain, meskipun error lebih besar di luar interval $[-2, 2]$.

Pembahasan:

- Aproksimasi dengan $n = 2$ menunjukkan error yang cukup besar, tetapi dengan $n = 6$, error berkurang signifikan.
- Hasil aproksimasi mendekati fungsi asli di sekitar $x = 0$ dan tetap cukup baik di sekitar $x = 1$, namun error relatif dan absolut meningkat secara jelas ketika $|x|$ semakin besar.
- Hal ini menunjukkan bahwa deret Maclaurin lebih akurat untuk nilai x yang dekat dengan 0, dan semakin besar nilai $|x|$, semakin banyak suku yang dibutuhkan untuk mencapai akurasi yang baik.

4.2. Hasil Fungsi Sinus

Aproksimasi menggunakan deret Maclaurin menghasilkan hasil yang semakin akurat dengan bertambahnya jumlah suku. Untuk jumlah suku kecil seperti $n = 2$, perbedaan antara aproksimasi dan fungsi asli cukup besar, terutama pada nilai x yang jauh dari nol. Namun, seiring dengan penambahan jumlah suku ($n = 6$ atau lebih), error berkurang drastis, dan aproksimasi mendekati nilai dengan sangat baik. Error absolut dan relatif relatif kecil di sekitar

$x=0x = 0x=0$ dan meningkat sedikit seiring dengan penurunan nilai xxx .

Pembahasan:

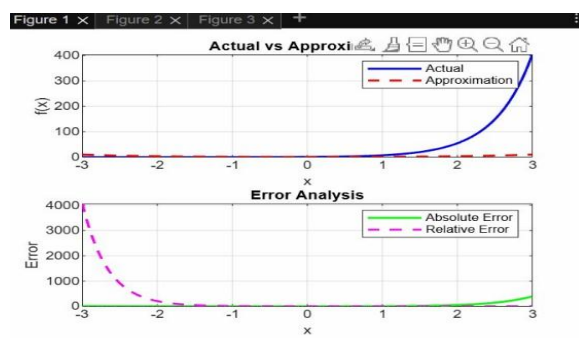
- Deret Maclaurin untuk sinus sangat akurat di sekitar $x=0x = 0x=0$, dengan error kecil untuk nilai xxx yang lebih kecil.
- Penambahan suku hingga $n=6n = 6n=6$ memberikan hasil yang sangat mendekati fungsi asli di seluruh, meskipun ada sedikit peningkatan error pada nilai xxx yang lebih ekstrem.

Dengan penambahan suku yang lebih banyak, perbedaan antara aproksimasi dan fungsi asli semakin kecil, yang menunjukkan bahwa semakin banyak suku, semakin tepat.

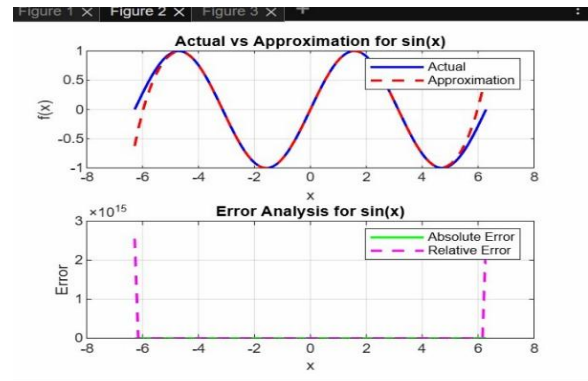
Kesimpulan:

- Akurasi Aproksimasi: o Deret Maclaurin memberikan hasil yang semakin mendekati nilai asli seiring bertambahnya jumlah suku (nnn).
 - Hasil aproksimasi untuk exe^{xex} dan menunjukkan konvergensi yang sangat baik, terutama di sekitar $x=0x = 0x=0$.
 - Fungsi logaritma memiliki keterbatasan di sekitar $x=-1x = 1x=-1$, meskipun dengan jumlah suku yang lebih besar, akurasi tetap bisa ditingkatkan di domain yang aman.
- Pengaruh Jumlah Suku terhadap Error:
 - Penambahan jumlah suku (nnn) berkontribusi signifikan terhadap pengurangan error absolut dan relatif pada ketiga fungsi.
 - Dengan nnn yang lebih besar, aproksimasi lebih mendekati nilai asli, yang mengindikasikan bahwa deret Maclaurin adalah metode yang cukup efektif untuk menghitung nilai fungsi yang lebih kompleks.
- Domain dan Singularitas:
 - Fungsi dan lebih stabil dan akurat untuk seluruh domainnya, meskipun error meningkat pada nilai $|x|/x|/x|$ yang sangat besar.
 - Fungsi memiliki keterbatasan mendekati $x=-1x = -1x=-1$, yang merupakan titik singularitas fungsi tersebut.

Dengan demikian, meskipun metode deret Maclaurin sangat efektif untuk aproksimasi, penting untuk mempertimbangkan jumlah suku yang tepat dan domain fungsi untuk mencapai hasil yang lebih akurat.



Gambar 1. Grafik Analisis error



Gambar 2. Grafik Analisis error

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini telah berhasil mengimplementasikan metode numerik deret Maclaurin untuk aproksimasi fungsi matematika seperti exe^{xex} , dan) menggunakan MATLAB. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: Deret Maclaurin memberikan hasil aproksimasi yang akurat untuk nilai xxx yang dekat dengan pusat ekspansi ($x=0x = 0x=0$). Namun, tingkat akurasi menurun ketika xxx berada jauh dari pusat ekspansi, khususnya untuk jumlah suku (nnn) yang kecil. Peningkatan jumlah suku (nnn) dalam deret Maclaurin secara signifikan meningkatkan akurasi aproksimasi, sebagaimana ditunjukkan oleh penurunan error absolut dan relatif. Namun, untuk fungsi tertentu seperti, nnn yang besar mungkin diperlukan untuk mencapai akurasi tinggi pada interval nilai xxx yang lebih luas. Aproksimasi kurang efektif untuk fungsi dengan singularitas atau pada interval nilai xxx yang jauh dari pusat ekspansi. Hal ini dikarenakan deret Maclaurin bersifat konvergen secara lokal. MATLAB sebagai alat bantu numerik mempermudah perhitungan deret Maclaurin melalui pemrograman yang efisien. Fasilitas MATLAB seperti fungsi bawaan, kemampuan plotting, dan dukungan manipulasi data memfasilitasi analisis grafik perbandingan fungsi asli dan hasil aproksimasi, serta perhitungan error absolut dan relatif. Analisis error menunjukkan bahwa error relatif cenderung lebih kecil pada nilai xxx yang dekat dengan pusat ekspansi dan meningkat secara signifikan pada nilai xxx yang lebih jauh, khususnya untuk nnn yang kecil.

Untuk penelitian selanjutnya, direkomendasikan Mengkaji metode numerik lainnya, seperti deret Taylor atau interpolasi polynomial, sebagai perbandingan. Menerapkan metode ini pada fungsi yang lebih kompleks dan dalam aplikasi nyata, seperti simulasi fisika atau pemrosesan sinyal. Mengoptimalkan kode MATLAB untuk efisiensi dan interaktivitas, misalnya dengan membuat GUI atau Live Script. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam memahami dan mengaplikasikan metode numerik deret Maclaurin, sekaligus mendorong pengembangan solusi berbasis numerik untuk masalah matematika yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-04558-8>
- [2] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical methods for engineers* (7th ed.). McGraw-Hill Education.
- [3] MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from <https://www.mathworks.com/help/>
- [4] Weisstein, E. W. (2024). Maclaurin series. In *MathWorld - A Wolfram Web Resource*. Retrieved from <https://mathworld.wolfram.com/MaclaurinSeries.html>
- [5] Scarborough, J. B. (1958). *Numerical mathematical analysis* (4th ed.). Oxford University Press.
- [6] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9th ed.). Cengage Learning
- [7] Atkinson, K. E. (1989). *An introduction to numerical analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [8] Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.
- [9] MathWorks Blog. (2024). Numerical methods and approximations using MATLAB. Retrieved from <https://www.mathworks.com/blogs>
- [10] Witanto, D. A. (2022). *Matematika numerik: Teori dan implementasi*. Graha Ilmu