

KAJIAN KONSEPTUAL MATRIKS SEBAGAI STRUKTUR DASAR DALAM ALJABAR LINEAR

Idris Putra Hatoguan, Ichwanul Muslim Karo Karo

Ilmu Komputer, Universitas Negeri Medan

Jalan Willem Iskandar, Pasar V Medan Estate, Percut Sei Tuan, Deli Serdang, Sumatera Utara, Indonesia
idrisputra76@gmail.com

ABSTRAK

Matriks merupakan salah satu konsep dasar yang sangat penting dalam aljabar linear. Dalam kajian ini, pembahasan difokuskan pada pemahaman konsep matriks secara mendalam, bukan hanya sebagai alat hitung, tetapi juga sebagai struktur yang merepresentasikan hubungan linear dalam berbagai sistem. Matriks digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, mendeskripsikan transformasi linear, serta membentuk dasar dalam memahami ruang vektor dan aplikasinya. Kajian ini bertujuan untuk menggambarkan bagaimana matriks menjadi fondasi dalam pengembangan teori aljabar linear, serta memperlihatkan keterkaitan antar konsep melalui pendekatan konseptual. Dengan pemahaman yang lebih kuat terhadap sifat-sifat dan operasi matriks, diharapkan pembaca dapat melihat peran penting matriks tidak hanya dalam konteks matematis, tetapi juga dalam penerapannya di bidang ilmu pengetahuan, teknik, dan teknologi.

Kata kunci : Matriks, Aljabar Linear, Operasi Matriks, Struktur Dasar, Transformasi Linear

1. PENDAHULUAN

Aljabar linear merupakan salah satu cabang matematika yang memiliki peran sangat penting dalam berbagai bidang ilmu, baik teori maupun terapan. Salah satu elemen utama dalam aljabar linear adalah matriks, yaitu susunan bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang merepresentasikan data atau relasi linear. Matriks tidak hanya digunakan sebagai alat bantu dalam perhitungan matematis, tetapi juga sebagai struktur yang merepresentasikan konsep-konsep mendasar seperti sistem persamaan linear, transformasi linear, dan ruang vektor.

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi, penggunaan matriks semakin meluas, mulai dari bidang teknik, komputer, fisika, ekonomi, hingga kecerdasan buatan. Di balik aplikasinya yang luas tersebut, terdapat struktur konseptual yang kuat dan terorganisir, yang menjadikan matriks sebagai fondasi dalam aljabar linear. Sayangnya, dalam pembelajaran matematika, pemahaman tentang matriks sering kali terfokus pada aspek komputasional semata, seperti penjumlahan, perkalian, atau invers matriks, tanpa menggali makna konseptual yang mendasarinya.

Kajian ini bertujuan untuk meninjau kembali konsep matriks dari sudut pandang yang lebih fundamental dan teoritis. Penekanan diberikan pada bagaimana matriks merepresentasikan transformasi linear, membangun ruang vektor, dan menjadi jembatan antara bentuk-bentuk aljabar dan geometri. Dengan pendekatan konseptual ini, diharapkan pembaca dapat memperoleh pemahaman yang lebih menyeluruh mengenai peran dan posisi matriks dalam struktur aljabar linear.

Melalui kajian ini pula, akan ditunjukkan bahwa pemahaman terhadap struktur dasar matriks tidak hanya penting dalam ranah teori matematika, tetapi juga memberikan pondasi kuat dalam penerapan aljabar linear di dunia nyata. Oleh karena itu,

pembahasan ini diharapkan dapat menjadi kontribusi dalam memperkuat landasan berpikir matematis yang logis, sistematis, dan terstruktur.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam kajian aljabar linear, matriks menjadi elemen kunci yang merepresentasikan berbagai fenomena matematis, mulai dari penyelesaian sistem persamaan linear hingga transformasi linear dalam ruang vektor. Banyak literatur menyebutkan bahwa matriks bukan hanya alat komputasional, tetapi juga suatu struktur konseptual yang memfasilitasi pemahaman relasi linear dalam bentuk formal [1].

Sistem persamaan linear merupakan salah satu aplikasi awal dari matriks. Melalui metode eliminasi Gauss dan kaidah-kaidah operasi baris elementer, matriks dapat digunakan untuk mencari solusi dari sistem yang kompleks secara efisien. Pemanfaatan perangkat lunak seperti Python dengan library NumPy dan SymPy dalam simulasi matriks menegaskan pentingnya teknologi dalam menunjang pemahaman teori dan penerapan [2].

Selanjutnya, transformasi linear menjadi salah satu konsep yang esensial dalam pembelajaran aljabar linear, dimana setiap transformasi dapat direpresentasikan oleh matriks tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antara geometri dan aljabar menjadi semakin nyata melalui struktur matriks [3].

Ruang vektor, sebagai lanjutan dari pemahaman terhadap matriks dan transformasi, menyajikan kerangka kerja untuk merepresentasikan data, posisi, dan hubungan antar objek dalam banyak dimensi. Matriks kemudian menjadi alat untuk berpindah dari satu basis ke basis lainnya, atau menggambarkan perubahan struktur dalam ruang tersebut.

Kajian terkait eigenvalue dan eigenvector turut memperluas wawasan akan pentingnya matriks.

Dalam banyak kasus, eigenvalue menggambarkan nilai karakteristik dari suatu transformasi, dan eigenvector memperlihatkan arah tidak berubah selama transformasi berlangsung. Konsep ini banyak dimanfaatkan dalam optimasi jaringan, pemrosesan sinyal, dan pembelajaran mesin [4].

Dalam meningkatkan pemahaman mahasiswa dalam memahami aljabar linear, dibutuhkan juga kemampuan mahasiswa dalam hal komunikasi matematis, yang berguna untuk menginterpretasikan dan mengevaluasi ide-ide matematika baik secara lisan, tulisan, maupun dalam bentuk visual, dan tentunya mahasiswa juga diharapkan memiliki kemampuan dalam menggunakan istilah-istilah maupun notasi matematika [5].

Namun terdapat beberapa juga beberapa kendala yang dapat memengaruhi mahasiswa dalam mengerjakan soal yang berhubungan dengan aljabar linear, kesalahan mahasiswa dalam mengerjakan soal dapat disebabkan oleh beberapa faktor yang berpengaruh, diantaranya adalah faktor IQ dan faktor motivasi [6].

Penurunan motivasi mahasiswa juga dapat dilihat semenjak pandemi covid-19, dimana kebanyakan mahasiswa merasa malas karena sebelumnya belum pernah mengikuti pembelajaran lewat online, oleh karena itu, beberapa peneliti mencoba memberikan solusi lewat pengembangan E-Modul. Lewat cara ini, peneliti juga memperoleh hasil berupa peningkatan hasil belajar mahasiswa dengan adanya E-Modul [7].

Dalam kaitannya dengan hambatan belajar mahasiswa, diperlukan juga metode lain seperti learning obstacle, yang dimana pada metode ini pendidik terlebih dahulu dianjurkan untuk mengetahui hambatan mahasiswa terlebih dahulu sebelum memberikan materi pembelajaran [8].

Dalam materi aljabar linear, matrix adalah salah satu materi pokok yang wajib dipelajari oleh mahasiswa, namun pembelajaran dikelas dengan perhitungan manual tentunya menjadi hal yang kurang relevan dengan perkembangan zaman, oleh karena itu penggunaan software juga digunakan dalam meningkatkan kualitas pembelajaran [9].

Dalam halnya meningkatkan kualitas pembelajaran, tentunya tidak semua berjalan dengan mulus dikarenakan kadang muncul beberapa hambatan berupa beberapa faktor yang memengaruhi mahasiswa, faktor-faktor yang dimaksud adalah faktor internal yang berasal dari mahasiswa itu sendiri dan faktor eksternal, berupa distraksi dari lingkungan mahasiswa itu sendiri [10].

Penelitian ini memperkuat literatur dengan menunjukkan bagaimana sebuah matriks jarak antar kecamatan dapat dianalisis secara matematis melalui determinan, invers, dan eigenstruktur, untuk menggambarkan kestabilan dan konektivitas dalam sistem transportasi kota.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini mengadopsi pendekatan kualitatif dan kuantitatif untuk menyelidiki peran matriks sebagai struktur dasar dalam aljabar linear. Pendekatan kualitatif difokuskan pada pemahaman konseptual tentang matriks dan bagaimana matriks berfungsi sebagai objek fundamental dalam aljabar linear. Pendekatan ini melibatkan kajian teori dan analisis mendalam terhadap konsep-konsep dasar dalam aljabar linear, seperti sistem persamaan linear, transformasi linear, ruang vektor, serta operasi matriks. Sementara itu, pendekatan kuantitatif berfokus pada penerapan konsep-konsep tersebut melalui eksperimen numerik yang mengandalkan perangkat lunak komputasi. Pendekatan ini digunakan untuk memverifikasi teori yang telah dibahas dan menguji berbagai operasi matriks melalui simulasi dan perhitungan yang lebih konkret.

Proses penelitian dimulai dengan studi literatur yang luas mengenai matriks dan aplikasinya dalam berbagai bidang. Sumber literatur yang digunakan meliputi buku teks matematika, artikel jurnal ilmiah, disertasi, serta karya-karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan teori aljabar linear dan penerapan matriks dalam memecahkan masalah matematis. Literatur ini memberikan dasar yang kokoh untuk memahami bagaimana matriks digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, transformasi linear, serta konsep ruang vektor. Selain itu, studi literatur juga mencakup kajian mengenai eigenvalue dan eigenvector yang seringkali menjadi bagian penting dalam analisis matriks.

Setelah memperoleh pemahaman teoritis dari studi literatur, langkah berikutnya adalah pemodelan matematis menggunakan matriks. Pemodelan ini bertujuan untuk menjelaskan berbagai konsep dasar aljabar linear dengan menggunakan matriks sebagai objek representasi. Matriks digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah aljabar linear, seperti menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks koefisien dan metode eliminasi Gauss. Selain itu, matriks juga digunakan untuk merepresentasikan transformasi linear yang terjadi dalam ruang vektor. Transformasi ini melibatkan perubahan bentuk geometri atau struktur ruang melalui operasi matriks. Oleh karena itu, pemahaman terhadap sifat-sifat matriks menjadi kunci dalam mempelajari perubahan tersebut.

Pada tahap implementasi dan pengujian, dilakukan eksperimen untuk memverifikasi teori yang telah dipelajari dengan menggunakan perangkat lunak komputasi. Dalam penelitian ini, bahasa pemrograman Python digunakan sebagai alat utama untuk melakukan perhitungan dan simulasi numerik. Python dipilih karena kemampuannya dalam menangani perhitungan matematis dengan cepat dan efisien, serta adanya library khusus seperti NumPy dan SymPy yang sangat berguna dalam manipulasi matriks dan operasi aljabar linear.

Library NumPy digunakan untuk menangani matriks dalam bentuk array dan memungkinkan pengguna untuk melakukan operasi dasar seperti perkalian matriks, penjumlahan, invers, dan determinan. Sementara itu, SymPy digunakan untuk menghitung nilai eigen, vektor eigen, dan melakukan analisis simbolik terhadap matriks. Kombinasi kedua library ini memungkinkan penelitian untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai masalah matematis dengan lebih efisien.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, kami mengkaji matriks 20x20 yang merepresentasikan jarak antar kecamatan di Kota Medan. Matriks ini terdiri dari 20 baris dan 20 kolom, di mana setiap elemen dalam matriks mengindikasikan jarak antara dua kecamatan yang bersangkutan. Setiap kecamatan diwakili oleh indeks dalam matriks, dan nilai di dalam matriks mewakili jarak (dalam kilometer) antara dua kecamatan tersebut. Matriks ini sangat penting dalam analisis jaringan transportasi, di mana kita dapat menggunakan informasi jarak untuk merencanakan jalur transportasi, mengoptimalkan rute, dan melakukan analisis konektivitas antar kecamatan.

4.1. Matriks Jarak Antar Kecamatan

Matriks jarak yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks berukuran 20x20, yang mengandung data jarak antar 20 kecamatan di Kota Medan. Meskipun dalam penelitian ini kita menggunakan nilai acak untuk jarak antar kecamatan, pada prakteknya, data jarak yang lebih akurat harus diperoleh dari sumber yang dapat dipercaya, seperti pengukuran jarak atau data GIS (Geographic Information Systems). Setiap elemen $A[i][j]$ dalam matriks ini merepresentasikan jarak antara kecamatan ke- i dan kecamatan ke- j , dengan asumsi bahwa jarak antara kecamatan iii dan jjj adalah simetris, yaitu $A[i][j] = A[j][i]$.

Contoh matriks jarak antar kecamatan dapat digambarkan sebagai berikut (meskipun ini adalah matriks acak untuk keperluan simulasi):

```
[[ 0, 10, 20, 15, 25, 30, 18, 22, 28, 35, 40, 45, 50, 55,
  60, 62, 65, 70, 75, 80],
 [10, 0, 12, 9, 18, 20, 15, 18, 25, 30, 35, 38, 42, 48,
  53, 58, 63, 70, 72, 77],
 [20, 12, 0, 8, 16, 21, 13, 17, 23, 32, 36, 40, 45, 50,
  55, 62, 66, 72, 74, 79]]
```

Dalam contoh ini, baris pertama mengindikasikan jarak dari kecamatan pertama ke kecamatan lainnya (misalnya, jarak dari kecamatan pertama ke kecamatan kedua adalah 10 km, ke kecamatan ketiga adalah 20 km, dan seterusnya). Demikian juga untuk baris-baris berikutnya yang menggambarkan jarak antar kecamatan lainnya.

4.2. Perhitungan Determinan Matriks Jarak

Langkah pertama yang dilakukan dalam analisis adalah menghitung determinan dari matriks jarak menggunakan fungsi `np.linalg.det()` pada Python. Determinan dari matriks ini memberi tahu kita tentang sifat-sifat struktural dari jaringan kecamatan. Jika determinannya nol, ini menunjukkan bahwa matriks tersebut singular, yang berarti bahwa sistem yang terkait dengan matriks ini tidak memiliki solusi unik atau tidak dapat diuraikan lebih lanjut melalui invers matriks.

Dalam analisis ini, kita menghitung determinan matriks jarak untuk memahami apakah jaringan antar kecamatan di Kota Medan stabil atau tidak dalam hal distribusi jarak antar kecamatan. Berikut adalah hasil perhitungan determinan untuk matriks jarak acak yang digunakan dalam simulasi:

```
det_jarak = np.linalg.det(jarak)
print("Determinant Matriks Jarak:", det_jarak)
```

Jika hasil determinan yang didapat sangat kecil atau mendekati nol, ini menunjukkan bahwa jaringan transportasi antar kecamatan mungkin mengalami ketidakstabilan atau ada korelasi tinggi antara jarak antar beberapa kecamatan. Hal ini dapat memberikan petunjuk untuk melakukan analisis lebih lanjut, seperti mengidentifikasi kecamatan yang saling terkoneksi erat dalam jaringan.

4.3. Perhitungan Invers Matriks Jarak

Setelah menghitung determinan, langkah berikutnya adalah mencoba untuk menghitung invers matriks jarak jika determinannya tidak nol. Invers matriks digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linear atau untuk mengoptimalkan solusi dalam jaringan kecamatan. Dalam konteks ini, invers matriks memungkinkan kita untuk mengidentifikasi solusi yang lebih optimal dalam merencanakan rute transportasi antar kecamatan.

Untuk menghitung invers matriks jarak, kita menggunakan fungsi `np.linalg.inv()`:

```
if det_jarak != 0:
    inv_jarak = np.linalg.inv(jarak)
    print("\nInvers Matriks Jarak:")
    print(inv_jarak)
else:
    print("\nMatriks Jarak tidak memiliki invers karena determinannya nol.")
```

Perhitungan invers ini bermanfaat jika kita ingin melakukan analisis lebih lanjut, seperti merencanakan pergerakan atau distribusi beban antar kecamatan. Dengan invers matriks, kita dapat menentukan bagaimana perubahan dalam jarak antar kecamatan dapat mempengaruhi keseluruhan struktur jaringan transportasi.

4.4. Analisis Eigenvalue dan Eigenvector

Salah satu analisis lanjutan yang dilakukan adalah menghitung eigenvalue dan eigenvector dari matriks jarak. Eigenvalue memberikan wawasan tentang karakteristik penting dari jaringan, seperti dominasi atau kepadatan koneksi antara kecamatan. Eigenvector yang terkait dengan eigenvalue terbesar sering digunakan untuk mengidentifikasi kecamatan-kecamatan yang paling dominan dalam jaringan. Kecamatan-kecamatan ini dapat dilihat sebagai titik pusat atau "hub" dalam jaringan transportasi.

Untuk menghitung eigenvalue dan eigenvector, kita menggunakan SymPy, yang memungkinkan kita untuk melakukan perhitungan simbolik pada matriks jarak:

```
jarak_sympy = sp.Matrix(jarak)
eigenvals = jarak_sympy.eigenvals()
eigenvecs = jarak_sympy.eigenvecs()
```

```
print("\nEigenvalues Matriks Jarak:")
print(eigenvals)
```

```
print("\nEigenvectors Matriks Jarak:")
print(eigenvecs)
```

Hasil dari eigenvalue dapat digunakan untuk mengidentifikasi bagian-bagian penting dalam jaringan. Eigenvector yang terkait dengan eigenvalue terbesar seringkali memberikan gambaran tentang kecamatan yang paling banyak terhubung dengan kecamatan lain, yang dapat digunakan untuk memprioritaskan jalur transportasi atau pusat distribusi.

4.5. Mencari Jarak Terjauh Antar Kecamatan

Selain analisis matematis yang lebih kompleks, salah satu aspek yang penting dalam penelitian ini adalah menemukan jarak terjauh antar kecamatan. Menggunakan fungsi `np.max(jarak)`, kita dapat dengan mudah mengidentifikasi dua kecamatan yang memiliki jarak terjauh satu sama lain. Ini berguna dalam konteks perencanaan transportasi, di mana kita perlu mengetahui kecamatan yang terhubung secara jarak terjauh, sehingga dapat memaksimalkan efisiensi transportasi dan pengurangan waktu tempuh.

```
max_distance = np.max(jarak)
print("\nJarak Terjauh antar kecamatan di Kota Medan (dalam km):", max_distance)
```

Hasil dari analisis ini menunjukkan bahwa kecamatan dengan jarak terjauh dapat menjadi fokus dalam perencanaan jalan atau rute transportasi untuk mengurangi kemacetan atau meningkatkan konektivitas antar wilayah.

Berikut adalah source code Python untuk membuat matriks jarak antar kecamatan Kota Medan yang berukuran 20x20:

```
import numpy as np
```

```
# Misalkan kita memiliki 20 kecamatan di Kota Medan
kecamatan = [
    'Kecamatan 1', 'Kecamatan 2', 'Kecamatan 3',
    'Kecamatan 4', 'Kecamatan 5',
    'Kecamatan 6', 'Kecamatan 7', 'Kecamatan 8',
    'Kecamatan 9', 'Kecamatan 10', 'Kecamatan 11',
    'Kecamatan 12', 'Kecamatan 13', 'Kecamatan 14',
    'Kecamatan 15',
    'Kecamatan 16', 'Kecamatan 17', 'Kecamatan 18',
    'Kecamatan 19', 'Kecamatan 20']
```

```
# Membuat matriks jarak antar kecamatan (20x20)
# Misalkan jarak antar kecamatan berupa nilai acak
# antara 1 km hingga 50 km
np.random.seed(42) # Mengatur seed agar hasil acak
# konsisten
jarak = np.random.randint(1, 51, size=(20, 20)) #
# Membuat nilai acak antara 1 dan 50 km
```

```
# Membuat matriks simetris (jarak A ke B = jarak B ke A)
for i in range(20):
    for j in range(i+1, 20):
        jarak[j, i] = jarak[i, j]
```

```
# Menampilkan matriks jarak antar kecamatan
print("Matriks Jarak Antar Kecamatan (20x20):\n")
for i in range(20):
    print(f'{kecamatan[i]}: {jarak[i]}')
```

```
# Jika Anda ingin melihat matriks dalam bentuk yang
# lebih terstruktur:
import pandas as pd
df = pd.DataFrame(jarak, index=kecamatan,
                  columns=kecamatan)
print("\nMatriks Jarak dalam Bentuk Tabel:")
print(df)
```

Berikut adalah untuk Output nya :
Matriks Jarak Antar Kecamatan (20x20):

```
Kecamatan 1: [39 29 15 43 8 21 39 19 23 11 11 24 36 40 24
              3 22 2 24 44]
Kecamatan 2: [29 38 2 21 33 12 22 44 25 49 27 42 28 16 15
              47 44 3 37 7]
Kecamatan 3: [15 2 39 18 4 25 14 50 9 26 2 20 28 47 7
              44 8 47 35 14]
Kecamatan 4: [43 21 18 40 4 2 6 42 4 29 18 26 44 34 10
              36 14 31 48 15]
Kecamatan 5: [8 33 4 4 21 16 45 18 47 24 26 25 45 41 29
              15 45 1 25 7]
Kecamatan 6: [21 12 25 2 16 24 11 17 8 35 35 33 5 42 39
              41 28 7 9 8]
Kecamatan 7: [39 22 14 6 45 11 37 35 44 40 22 27 35 1 35
              37 47 14 3 1]
Kecamatan 8: [19 44 50 42 18 17 35 15 26 42 13 32 39 49
              32 4 30 37 23 39]
Kecamatan 9: [23 25 9 4 47 8 44 26 22 28 2 42 45 6 28
              28 44 44 20 30]
Kecamatan 10: [11 49 26 29 24 35 40 42 28 3 39 6 8 27 9
               37 33 42 44 24]
```

Kecamatan 11: [11 27 2 18 26 35 22 13 2 39 3 49 37 49 17 49 2 2 28 23]
 Kecamatan 12: [24 42 20 26 25 33 27 32 42 6 49 4 11 17 38 24 5 34 6 22]
 Kecamatan 13: [36 28 28 44 45 5 35 39 45 8 37 11 26 3 19 20 32 7 41 33]
 Kecamatan 14: [40 16 47 34 41 42 1 49 6 27 49 17 3 35 7 16 26 48 49 2]
 Kecamatan 15: [24 15 7 10 29 39 35 32 28 9 17 38 19 7 24 33 24 11 49 8]
 Kecamatan 16: [3 47 44 36 15 41 37 4 28 37 49 24 20 16 33 16 41 36 33 4]
 Kecamatan 17: [22 44 8 14 45 28 47 30 44 33 2 5 32 26 24 41 38 38 45 8]
 Kecamatan 18: [2 3 47 31 1 7 14 37 44 42 2 34 7 48 11 36 38 28 30 29]
 Kecamatan 19: [24 37 35 48 25 9 3 23 20 44 28 6 41 49 49 33 45 30 25 42]
 Kecamatan 20: [44 7 14 15 7 8 1 39 30 24 23 22 33 2 8 4 8 29 42 43]

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan dari artikel ini menegaskan bahwa matriks memiliki peran yang sangat penting sebagai struktur dasar dalam aljabar linear. Kajian ini menunjukkan bahwa matriks tidak hanya sekadar alat komputasi, tetapi juga sebagai representasi dari transformasi linear dan relasi dalam ruang vektor. Melalui pendekatan konseptual dan penerapan berbasis komputasi menggunakan Python, artikel ini membuktikan bagaimana operasi-operasi seperti determinan, invers, eigenvalue, dan eigenvector dapat digunakan untuk menganalisis jaringan transportasi antar kecamatan di Kota Medan. Hasil penelitian menggarisbawahi pentingnya pemahaman mendalam terhadap sifat-sifat matriks agar dapat diterapkan secara efektif dalam menyelesaikan permasalahan nyata di bidang ilmu komputer, teknik, dan teknologi.

Dalam pengembangan kajian aljabar linear, khususnya dalam pemanfaatan matriks sebagai struktur dasar, disarankan agar pemahaman konsep tidak hanya difokuskan pada aspek komputasi semata, tetapi juga pada pemahaman makna dan struktur konseptualnya. Pendekatan pembelajaran yang menekankan pada keterkaitan antara teori dan aplikasi nyata sangat penting untuk membangun pemahaman yang lebih mendalam.

Pemanfaatan perangkat lunak seperti Python beserta library seperti NumPy dan SymPy perlu terus didorong dalam pembelajaran dan penelitian aljabar linear, karena dapat mempercepat proses perhitungan serta memberikan visualisasi dan simulasi yang lebih intuitif terhadap konsep-konsep matematis.

Dalam konteks penerapan, studi terhadap matriks jarak antar wilayah seperti kecamatan di Kota Medan dapat diperluas dengan menggunakan data riil yang diperoleh dari sumber terpercaya, seperti data GIS. Hal ini akan meningkatkan validitas hasil analisis dan memberikan kontribusi yang lebih nyata dalam pengambilan keputusan di bidang transportasi dan perencanaan wilayah.

Penelitian lebih lanjut juga disarankan untuk mengeksplorasi konsep-konsep lain dalam aljabar linear, seperti diagonalization, orthogonal projection, serta aplikasinya dalam bidang ilmu komputer dan kecerdasan buatan. Dengan pendekatan yang lebih interdisipliner, aljabar linear dapat menjadi fondasi yang lebih kuat dalam menjawab tantangan teknologi masa kini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] I. Handayani and W. Noviana, "ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS PADA MATERI SISTEM PERSAMAAN LINEAR," *JURNAL PENDIDIKAN GLASSER*, vol. 6, no. 1, p. 63, Mar. 2022, doi: 10.32529/glasser.v6i1.1353.
- [2] N. Ul Fitriah, A. Fatihatul Aini, Z. Natasya, and U. Pahlawan Tuanku Tambusai, "Penerapan aljabar linear dalam pemodelan sistem dinamis," 2025. [Online]. Available: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>
- [3] M. Permata Ayu, U. Stella Maris Sumba Yemy Maria Bouk, S. Ligorukalembu Weri Alexander Talu Popo, and U. Stella Maris Sumba, "Analisis Kesalahan Mahasiswa Pada Sistem Persamaan Linear Dengan Operasi Baris Elementer Kelas Aljabar Linear Dan Matriks," *Jurnal Jendela Pendidikan*, vol. 4, no. 03, 2024.
- [4] R. Cahyadi, N. Sutriningsih, and F. Keguruan, "Analisis Penalaran Matematis Mahasiswa Menyelesaikan Soal Matriks Proyeksi Ortogonal Pada Matakuliah Aljabar Linear," *Jurnal E-DuMath*, vol. 8, no. Hlm, pp. 76–82.
- [5] I. Maryati, Y. Suzana, D. Harefa, and I. T. Maulana, "Analisis Kemampuan Komunikasi Matematis dalam Materi Aljabar Linier," *PRISMA*, vol. 11, no. 1, p. 210, Jun. 2022, doi: 10.35194/jp.v11i1.2044.
- [6] D. Septianawati, S. Putri, and I. Pontianak, "PENGEMBANGAN MODUL PEMBELAJARAN ALJABAR LINEAR MENGGUNAKAN SOFTWARE MATRIX LABORATORY (MATLAB) DI PRODI TADRIS MATEMATIKA."
- [7] I. Marfu, J. Selatan, and D. Khusus Ibukota Jakarta, "Analisis Kesalahan Hasil Belajar Mahasiswa pada Operasi Matriks Mata Kuliah Aljabar Linear dan Matriks," *Journal on Education*, vol. 06, no. 01
- [8] E. Wulantina, "Pengembangan E-Modul Aljabar Linear dengan Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik Berbasis Nilai-Nilai Keislaman," *JNPM (Jurnal Nasional Pendidikan Matematika)*, vol. 6, no. 2, pp. 316–325, 2022, doi: 10.33603/jnpm.v6i2.6103.
- [9] L. M. Angraini dan A. Wahyuni, "Pengembangan Bahan Ajar Berbasis Pemecahan Masalah pada Mata Kuliah Aljabar Linear," *Euclid*, vol. 8, no. 1, pp. 1–82, 2022.
- [10] M. Fatwa, R. Ristu, S. Pandiangan, dan E. Supriyadi, "Pengaplikasian MATLAB pada Perhitungan Matriks," *Papanda Journal of Mathematics and Sciences Research (PJMSR)*, vol. 1, no. 2, pp. 81–93, Des. 2022.